



# Équivalences entre conjectures de Soergel

Nicolas Libedinsky

*UFR de Mathématiques et Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7, 2 place Jussieu,  
75251 Paris Cedex 05, France*

Reçu le 27 mai 2008

Disponible sur Internet le 30 juillet 2008

Communiqué par Michel Broué

---

## Résumé

La catégorie de Soergel  $\mathbf{B}_k(V)$  sur un corps  $k$  est définie à partir d'un système de Coxeter  $(W, \mathcal{S})$  et d'une représentation  $k$ -linéaire  $V$  de  $W$ . C'est une catégorie de bimodules sur l'algèbre de polynômes sur  $V$ . C'est aussi une catégorification de l'algèbre de Hecke de  $(W, \mathcal{S})$ . Dans cet article nous montrons que pour certaines représentations  $V$  et  $V'$  de  $W$ , la conjecture de Soergel sur  $\mathbf{B}_k(V')$  est équivalente à celle sur  $\mathbf{B}_k(V)$ . En particulier, quand  $k = \mathbb{R}$ , nous pouvons choisir pour  $V'$  la représentation géométrique.

© 2008 Elsevier Inc. Tous droits réservés.

*Mots-clés* : Soergel's bimodules ; Kazhdan–Lusztig theory

---

## Introduction

Dans l'article [2] de 1992, Soergel a catégorifié  $\mathcal{H}$ , l'algèbre d'Iwahori–Hecke d'un système de Coxeter  $(W, \mathcal{S})$ . Ceci signifie que si  $k$  est un corps infini et  $V$  une représentation  $k$ -linéaire de  $W$  satisfaisant certaines propriétés, alors Soergel a construit une catégorie tensorielle  $\mathbf{B}_k(V)$  – appelée catégorie de Soergel sur  $V$  – et un isomorphisme d'anneaux  $\varepsilon$  de  $\mathcal{H}$  vers le groupe de Grothendieck scindé de  $\mathbf{B}_k(V)$ .

Il a alors posé une conjecture (2.7 ci-dessous) qui donne une correspondance bijective, via  $\varepsilon$ , entre les éléments de la base de Kazhdan–Lusztig et les éléments indécomposables de  $\mathbf{B}_k(V)$ .

Cette conjecture implique deux résultats majeurs : d'une part, quand  $k = \mathbb{R}$ , la conjecture de positivité des polynômes de Kazhdan–Lusztig (voir [4]) et d'autre part, quand  $k$  est de caractéris-

---

Adresse e-mail : [libedinsky@math.jussieu.fr](mailto:libedinsky@math.jussieu.fr).

tique positive, une partie de la conjecture de Lusztig portant sur les caractères des représentations irréductibles de groupes algébriques en caractéristique positive (voir [3]).

Dans la section 1 de cet article nous donnons les notations et définitions que nous utiliserons dans la suite. Dans la section 2 nous donnons l'énoncé des trois théorèmes principaux. Nous choisissons  $V$  et  $V'$  une représentation et une sous-représentation de  $W$  satisfaisant certaines propriétés techniques. Ces propriétés sont satisfaites en particulier quand  $k = \mathbb{R}$ ,  $V$  est une des représentations utilisées par Soergel dans sa théorie (une représentation RF) et  $V'$  est la représentation géométrique. Le premier théorème (2.2) établit des relations entre les espaces de morphismes de  $\mathbf{B}_k(V')$  et ceux de  $\mathbf{B}_k(V)$ . Le second (2.3) énonce une bijection entre les indécomposables de  $\mathbf{B}_k(V)$  et ceux de  $\mathbf{B}_k(V')$ . Le troisième (2.4) nous donne un isomorphisme entre les groupes de Grothendieck scindés de  $\mathbf{B}_k(V)$  et de  $\mathbf{B}_k(V')$ .

Ces deux derniers théorèmes impliquent que la conjecture de Soergel est équivalente pour  $\mathbf{B}_k(V)$  et  $\mathbf{B}_k(V')$ . En particulier ceci montre que la conjecture de Soergel pour  $k = \mathbb{R}$  et  $V$  la représentation géométrique implique la conjecture de positivité des polynômes de Kazhdan–Lusztig.

Dans la section 3 nous donnons les outils principaux pour démontrer ces théorèmes : notamment nous travaillerons au niveau des corps de fractions des anneaux de polynômes pour montrer des isomorphismes entre les espaces de morphismes. Enfin, dans la section 4 nous achevons les démonstrations des théorèmes.

### 1. Définitions

1.1. Donnons d'abord quelques définitions.

**Définition 1.1.** Un système de Coxeter est un couple  $(W, \mathcal{S})$  où  $W$  est un groupe et  $\mathcal{S} \subseteq W$  une partie génératrice, tels que  $W$  admet une présentation de générateurs  $s \in \mathcal{S}$  et relations  $(sr)^{m(s,r)} = 1$  pour  $s, r \in \mathcal{S}$ , avec  $m(s, s) = 1$ ,  $m(s, r) \geq 2$ , et éventuellement  $m(r, s) = \infty$  si  $s \neq r$ .

**Définition 1.2.** Soit  $(W, \mathcal{S})$  un système de Coxeter. Nous définissons l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(W, \mathcal{S})$  comme la  $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -algèbre de générateurs  $\{T_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ , ceux-ci satisfaisant les relations

$$T_s^2 = v^{-2} + (v^{-2} - 1)T_s$$

pour tout  $s \in \mathcal{S}$  et

$$\underbrace{T_s T_r T_s \cdots}_{m(s,r) \text{ termes}} = \underbrace{T_r T_s T_r \cdots}_{m(s,r) \text{ termes}}$$

si  $s, r \in \mathcal{S}$  et  $sr$  est d'ordre  $m(s, r)$ .

Si  $x = s_1 s_2 \cdots s_n$  est une expression réduite de  $x$ , on définit  $T_x = T_{s_1} T_{s_2} \cdots T_{s_n}$  ( $T_x$  ne dépend pas du choix de la décomposition réduite). Nous posons  $q = v^{-2}$ . Nous pouvons montrer que  $\{T_x\}_{x \in W}$  est une base de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ .

Soit  $\mathcal{T} \subseteq W$  le sous-ensemble des réflexions, c'est à dire, tous les éléments qui sont conjugués aux éléments de  $\mathcal{S}$ .

**Définition 1.3.** Soit  $k$  un corps de caractéristique différente de 2. Une représentation de dimension finie de  $W$  sur  $k$  est appelée réflexion fidèle (RF) si elle est fidèle et si l'ensemble d'éléments de  $W$  qui ont un espace de points fixes de codimension un coïncide avec l'ensemble des réflexions.

**Définition 1.4.** Pour chaque objet gradué  $M = \bigoplus_i M_i$ , et chaque entier  $n$ , on définit l'objet décalé  $M(n)$  par  $(M(n))_i = M_{i+n}$ .

**Définition 1.5.** Soit  $\tau : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$  l'application définie par

$$\tau\left(\sum_{x \in W} p_x T_x\right) = p_1 \quad (p_x \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]).$$

**Définition 1.6.** Pour toute petite catégorie additive  $\mathcal{A}$ , on définit le groupe de Grothendieck scindé  $\langle \mathcal{A} \rangle$ . C'est le groupe libre sur les objets de  $\mathcal{A}$  modulo les relations  $M = M' + M''$  chaque fois que  $M \cong M' \oplus M''$ . Chaque objet  $A \in \mathcal{A}$  définit un élément  $\langle A \rangle \in \langle \mathcal{A} \rangle$ .

**Définition 1.7.** Soit  $U$  une représentation de  $W$  sur le corps  $k$ . Soit  $R = S(U^*) = R(U)$  l'algèbre symétrique de  $U^*$ , c'est-à-dire l'algèbre des fonctions régulières sur  $U$ , sur laquelle  $W$  agit par fonctorialité. L'algèbre  $R$  est graduée de la manière suivante :  $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$  avec  $R_2 = U^*$  et  $R_i = 0$  pour  $i$  impair. Nous notons  $R^s$  le sous-anneau de  $R$  des invariants pour l'action de  $s \in W$ . Pour  $s \in \mathcal{S}$  nous définissons  $\theta_s = R \otimes_{R^s} R$ .

La catégorie de Soergel  $\mathbf{B}_k(U)$  associée à  $U$  est la catégorie des  $(R, R)$ -bimodules  $\mathbb{Z}$ -gradués, dont les objets sont les facteurs directs des sommes directes finies d'objets du type  $\theta_{s_1} \otimes_R \cdots \otimes_R \theta_{s_n}(d)$ , pour un  $d \in \mathbb{Z}$  et  $s_1, \dots, s_n \in \mathcal{S}$ . Par la suite nous noterons  $\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}(d)$  le  $(R, R)$ -bimodule  $\theta_{s_1} \otimes_R \cdots \otimes_R \theta_{s_n}(d)$ .

**Définition 1.8.** Nous disons qu'une paire  $(U, U')$  dont  $U$  est une représentation et  $U'$  une sous-représentation de  $W$  est une bonne paire, si  $U'$  satisfait à la propriété que les réflexions simples agissent comme des réflexions, et  $U$  satisfait aussi que le corollaire 4.2 de [1] est valable pour  $R = R(U)$ , c'est à dire :

**Propriété 1.9.** Nous définissons les entiers  $n_i$  par  $\tau((1 + T_{s_1}) \cdots (1 + T_{s_n})) = \sum_i n_i q^i$ . Alors, il existe un isomorphisme de  $R$ -modules à droite gradués

$$\text{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}, R) \simeq \bigoplus_i n_i R(2i).$$

**Remarque 1.10.** Dans l'article [4] Soergel montre que la propriété 1.9 est vraie si  $U$  est RF. Dans le même article Soergel construit une représentation réelle RF  $U_0$  pour chaque système de Coxeter  $(W, \mathcal{S})$ . Cette représentation admet une sous-représentation  $U'_0$  isomorphe à la représentation géométrique. Donc  $(U_0, U'_0)$  est une bonne paire.

1.2. Nous fixerons jusqu'à la fin de cet article une bonne paire  $(V, V')$ . Soit  $R' = R(V')$  l'algèbre des fonctions régulières sur  $V'$ . L'inclusion  $V' \subset V$  induit une surjection  $Q : R \rightarrow R'$ , ce qui permet de voir  $R'$  comme  $R$ -module. Pour  $s \in \mathcal{S}$  nous définissons  $\theta'_s = R' \otimes_{R^s} R'$ .

Soit  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_k(V)$ ,  $\mathbf{B}' = \mathbf{B}_k(V')$ ,  $\mathbf{C}$  la catégorie de  $(R, R)$ -bimodules,  $\mathbf{C}'$  la catégorie de  $(R', R')$ -bimodules et  $\mathfrak{X} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}'$  le foncteur additif qui envoie  $M$  vers  $R' \otimes_R M \otimes_R R'$ .

## 2. Théorèmes principaux

Nous avons que  $s \in \mathcal{S}$  agit comme une réflexion dans  $V$  et dans  $V'$ , donc nous pouvons trouver  $V''$  stable par  $s$ , avec  $V = V' \oplus V''$ . Comme  $R(V) = R(V') \otimes R(V'')$ , nous avons  $R^s = R'^s \otimes R(V'')$ . Cette dernière égalité nous permet d'obtenir les isomorphismes suivantes dans  $\mathbf{C}'$  :

$$\mathfrak{X}(\theta_s) \simeq R' \otimes_{R^s} R' \simeq \theta'_s. \tag{2.1}$$

**Lemme 2.1.** *Soit  $M \in \mathbf{B}$ . Alors  $\mathfrak{X}(M) \simeq R' \otimes_R M$  comme  $(R', R)$ -bimodules.*

**Démonstration.** Il suffit de le prouver pour  $M = \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_k}$ , avec  $s_1, \dots, s_k \in \mathcal{S}$ . Comme  $\ker(Q) = V'^{\perp} \cdot R$  (ici  $V'^{\perp}$  est l'ensemble des formes linéaires sur  $V$  nulles sur  $V'$ ), il suffit de montrer que  $(R' \otimes_R M) \cdot V'^{\perp} = 0$ . Mais si  $s \in \mathcal{S}$ , alors  $s$  agit trivialement sur  $V/V'$ , alors  $W$  agit trivialement sur  $V/V'$ , donc aussi sur  $V'^{\perp} \simeq (V/V')^*$ . Nous concluons que  $V'^{\perp} \subset R^W$ , alors  $(R' \otimes_R M) \cdot V'^{\perp} = V'^{\perp} \cdot (R' \otimes_R M) = 0$  ce qui permet de conclure.  $\square$

Avec ce lemme nous voyons aisément les isomorphismes dans  $\mathbf{C}'$  :

$$\mathfrak{X}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_k}) \simeq \theta'_{s_1} \cdots \theta'_{s_k} \simeq \mathfrak{X}(\theta_{s_1}) \cdots \mathfrak{X}(\theta_{s_k}). \tag{2.2}$$

Ces isomorphismes généralisent l'isomorphisme (2.1) et montrent qu'on peut regarder  $\mathfrak{X}$  comme un foncteur (tensoriel) de  $\mathbf{B}$  vers  $\mathbf{B}'$ . Les trois théorèmes suivants disent que la représentation dans  $V$  est équivalente à la représentation dans  $V'$  dans la théorie de Soergel.

**Théorème 2.2.** *Pour tout  $M, N \in \mathbf{B}$ , le morphisme canonique :*

$$R' \otimes_R \text{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{C}'}(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(N))$$

*est un isomorphisme de  $R'$ -modules gradués.*

**Théorème 2.3.**  *$M$  est indécomposable dans  $\mathbf{B}$  si et seulement si  $\mathfrak{X}(M)$  est indécomposable dans  $\mathbf{B}'$ .*

**Théorème 2.4.**  *$\mathfrak{X}$  induit un isomorphisme au niveau des groupes de Grothendieck scindés, qu'on appelle aussi  $\mathfrak{X} : \langle \mathbf{B} \rangle \rightarrow \langle \mathbf{B}' \rangle$*

2.1.

**Définition 2.5.** Une représentation est appelée « reflection vector faithful » (RVF) si elle satisfait que les réflexions agissent comme des réflexions et que les différentes réflexions ont des différents  $(-1)$ -espaces propres.

**Remarque 2.6.** L'ensemble des représentations RF est contenu dans l'ensemble des représentations RVF. La représentation géométrique d'un groupe de Coxeter  $W$  est RVF mais non pas nécessairement RF, comme le montre l'exemple du groupe diédral infini.

2.2. Soit  $U$  une représentation RVF. Dans le théorème 1.10 de l'article [2], Soergel donne un isomorphisme d'anneaux entre l'algèbre de Hecke de  $W$  et le groupe de Grothendieck scindé de  $\mathbf{B}_k(U)$ ,  $\varepsilon : \mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \langle \mathbf{B}_k(U) \rangle$ . Nous posons la conjecture de Soergel sur  $\mathbf{B}_{\mathbb{R}}(U)$  :

**Conjecture 2.7 (Soergel).** *Soit  $U$  une représentation RF de  $W$  sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in W$ , il existe un  $R(U)$ -bimodule indécomposable  $\mathbb{Z}$ -gradué  $B_x \in \mathbf{B}_k(U)$  tel que  $\varepsilon(C'_x) = \langle B_x \rangle$ , où  $C'_x$  est l'élément de la base de Kazhdan–Lusztig associé à  $x$ .*

**Remarque 2.8.** Dans [4], Soergel montre que prouver 2.7 pour un  $U$  quelconque satisfaisant les hypothèses de 2.7 implique la conjecture de positivité des polynômes de Kazhdan–Lusztig.

**Remarque 2.9.** La conjecture 2.7 peut se généraliser pour  $k$  un corps infini. Dans ce cas c'est connu qu'elle n'est plus vraie en toute généralité. Cependant, dans [3] Soergel montre que si la caractéristique de  $k$  est plus grande que le nombre de Coxeter de  $W$  et si  $W$  est un groupe de Weyl fini, alors la conjecture 2.7 est équivalente à une partie de la conjecture de Lusztig portant sur les caractères des représentations irréductibles de groupes algébriques sur  $k$  (par exemple  $GL_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ ).

**Remarque 2.10.** Si  $V$  et  $V'$  (les représentations qu'on a fixé dans la section 1.2) sont RVF, les théorèmes 2.3 et 2.4 impliquent que la conjecture de Soergel sur  $\mathbf{B}$  est équivalente à la conjecture de Soergel sur  $\mathbf{B}'$ .

En particulier, les remarques 1.10 et 2.8 impliquent que quand  $k = \mathbb{R}$ , si nous démontrons la conjecture 2.7 pour  $U = U'_0$  (la représentation géométrique définie dans la remarque 1.10), alors nous démontrons 2.7 pour  $U = U_0$ , et donc nous prouvons la conjecture de positivité de Kazhdan–Lusztig.

### 3. Travail sur les corps de fractions de $R$ et de $R'$

Pour démontrer ces théorèmes, nous commençons par un lemme important :

**Lemme 3.1.** *Soit  $(s_1, \dots, s_k) \in S^k$  et  $M = \theta_{s_1} \dots \theta_{s_k}$ . Ils existent un entier  $n$  et une application surjective  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(M, R^n)$ , tels que le morphisme  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(R^n, R) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(M, R)$  qui s'en déduit est un isomorphisme de  $R$ -modules à droite.*

**Remarque 3.2.** Ce morphisme peut être regardé comme la projection  $\Gamma_{\geq 0}M \rightarrow \Gamma_{\geq 0}M / \Gamma_{> 0}M$  dans la notation de l'article [4] section 5.

**Démonstration.** Étant donné que la propriété 1.9 est valable pour  $R = R(V)$ , dans l'article [1] nous montrons qu'il existe une base  $f_1, \dots, f_r \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(M, R)$  comme  $R$ -module, appelée base des feuilles légères, et qu'il existe un ensemble  $\{x_1, \dots, x_r\} \subseteq M$  tel que  $f_i(x_j) = 0$  si  $i < j$  et  $f_i(x_i) = 1$ . Ceci permet de conclure que  $n = r$  et  $f = \sum_i f_i$  satisfont les propriétés du théorème.  $\square$

Nous continuons avec les notations du lemme 3.1. Le lemme 3.1 nous donne une suite exacte de  $(R, R)$ -bimodules

$$0 \rightarrow \ker f \rightarrow M \rightarrow R^n \rightarrow 0. \tag{3.1}$$

Cette suite est scindée comme suite de  $R$ -modules à gauche,  $R^n$  étant projectif. Nous obtenons donc une suite exacte de  $(R', R)$ -bimodules

$$0 \rightarrow R' \otimes_R \ker f \rightarrow R' \otimes_R M \rightarrow R' \otimes_R R^n \rightarrow 0.$$

Comme  $M \in \mathbf{B}$ , par le lemme 2.1 l'action à droite de  $R$  sur  $R' \otimes_R M$  se factorise par  $R'$ , et comme  $R' \otimes_R \ker f$  s'injecte dans  $R' \otimes_R M$ , l'action à droite de  $R$  sur  $R' \otimes_R \ker f$  se factorise aussi par  $R'$ , donc nous pouvons considérer  $R' \otimes_R \ker f$  comme un  $(R', R')$ -bimodule. Finalement nous obtenons une suite exacte de  $R'$ -modules

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{C'}(R^n, R') \rightarrow \text{Hom}_{C'}(R' \otimes_R M, R') \rightarrow \text{Hom}_{C'}(R' \otimes_R \ker f, R'). \quad (3.2)$$

**Proposition 3.3.**  $\text{Hom}_{C'}(R' \otimes_R \ker f, R') = 0$ .

**Démonstration.** Avant de prouver cette proposition il nous faut prouver deux lemmes

**Lemme 3.4.** Soit  $K'$  le corps de fractions de  $R'$  et  $M \in \mathbf{B}$ . Nous avons un isomorphisme de  $(K', R)$ -bimodules :

$$K' \otimes_R M \simeq K' \otimes_R M \otimes_R K'.$$

**Démonstration.** Il suffit de prouver l'isomorphisme pour  $M = \theta_s$ . Pour ceci il faut commencer par prouver l'isomorphisme de  $(K', R)$ -bimodules suivant :

$$K' \otimes_{R's} R' \simeq K' \otimes_{R's} K'. \quad (3.3)$$

Soit  $in : R' \hookrightarrow K'$  l'injection canonique, et soit  $x'_s$  l'équation de l'hyperplan défini par  $s$  dans  $V'$ . Alors le morphisme

$Id \otimes in : K' \otimes_{R's} R' \rightarrow K' \otimes_{R's} K'$  a pour inverse le morphisme

$$\frac{p_1}{q_1} \otimes \frac{p_2}{q_2} \mapsto \frac{p_1}{q_1 q_2 s(q_2)} \otimes s(q_2) p_2,$$

ce qui montre la formule (3.3).

Nous avons alors une suite d'isomorphismes de  $(K', R)$ -bimodules :

$$\begin{aligned} K' \otimes_{R^s} R &\simeq K' \otimes_{R'} (R' \otimes_R (R \otimes_{R^s} R)) \\ &\simeq K' \otimes_{R'} (R' \otimes_{R^s} R') && \text{(lemme 2.1)} \\ &\simeq K' \otimes_{R'} (R' \otimes_{R's} R') && \text{(isomorphisme (2.1))} \\ &\simeq K' \otimes_{R's} K' && \text{(isomorphisme (3.3))} \\ &\simeq K' \otimes_{R^s} K'. \end{aligned}$$

Donc nous avons montré le lemme pour  $M = \theta_s$ , ce qui complète la preuve du lemme.  $\square$

**Remarque 3.5.** Dans la suite nous allons considérer  $K' \otimes_R M$ , via l'isomorphisme du lemme 3.4 comme un  $(K', K')$ -bimodule.

**Définition 3.6.** Soit  $A$  un anneau muni d’une action de  $W$ . Pour  $w \in W$ , nous notons  $A_w$  le  $(A, A)$ -bimodule ayant  $A$  comme ensemble sous-jacent, et dont l’action à gauche est l’action habituel mais l’action à droite est tordue par  $w$ , c’est-à-dire,  $a \cdot a' = aw(a')$ , pour tout  $a, a' \in A$ .

**Lemme 3.7.** Nous utilisons les notations du lemme 3.1. Il existe un ensemble d’entiers naturels  $\{n_w\}_{w \in W}$ , et un isomorphisme de  $(K', K')$ -bimodules :

$$K' \otimes_R M \simeq \bigoplus_{w \in W} (K'_w)^{n_w} \tag{3.4}$$

avec  $n_1 = n$ , où  $1$  est l’identité de  $W$ .

**Démonstration.** Nous avons une suite exacte de  $(R, R)$ -bimodules :

$$0 \rightarrow R_s \xrightarrow{\mu_s} \theta_s \xrightarrow{m_s} R \rightarrow 0$$

où  $m_s$  est le morphisme multiplication et  $\mu_s(1) = x_s \otimes 1 - 1 \otimes x_s$ , où  $x_s$  est l’équation dans  $V$  de l’hyperplan de réflexion de  $s$ . Comme  $R$  est un  $R$ -module projectif, en tensorisant par  $K'$  sur  $R$  nous retrouvons une suite exacte de  $(K', K')$ -bimodules par le lemme 3.4 :

$$0 \rightarrow K'_s \rightarrow K' \otimes_R \theta_s \rightarrow K' \rightarrow 0. \tag{3.5}$$

Soit  $x'_s$  l’équation dans  $V'$  de l’hyperplan de réflexion de  $s$ . La suite 3.5 est scindée par le morphisme  $\nu_s : K' \otimes_R \theta_s \rightarrow K'_s$  donné par  $(K' \otimes_{R^s} R \ni a \otimes b \mapsto as(b)/2x'_s)$ . Donc nous avons un isomorphisme de  $(K', K')$ -bimodules :

$$K' \otimes_{R'} \theta_s \simeq K' \oplus K'_s. \tag{3.6}$$

Nous avons les isomorphismes de  $(K', K')$ -bimodules :

$$\begin{aligned} K' \otimes_R \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_k} &\simeq K' \otimes_{R^{s_1}} K' \otimes_{R^{s_2}} \cdots \otimes_{R^{s_k}} K' && \text{(lemme 3.4)} \\ &\simeq (K' \otimes_{R^{s_1}} K') \otimes_{K'} \cdots \otimes_{K'} (K' \otimes_{R^{s_k}} K') \\ &\simeq (K' \oplus K'_{s_1}) \otimes_{K'} \cdots \otimes_{K'} (K' \oplus K'_{s_k}) && \text{(equation (3.6)).} \end{aligned}$$

Donc le fait que  $K'_x \otimes_{K'} K'_y \simeq K'_{xy}$  permet de conclure la première partie du lemme. Maintenant nous prouverons que  $n_1 = n$ . Par la construction de l’isomorphisme 3.6, si

$$l = \text{card}\{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq k; s_{i_1} \cdots s_{i_p} = 1\},$$

alors  $n_1 = l$ .

En outre, la propriété 1.9 dit que si nous définissons les entiers  $n'_i$  par  $\tau((1 + T_{s_1}) \cdots (1 + T_{s_k})) = \sum_i n'_i q^i$ , alors, il existe un isomorphisme de  $R$ -modules à droite gradués

$$\text{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_k}, R) \simeq \bigoplus_i n'_i R(2i).$$

Mais par le lemme 3.1, ceci implique que  $n = \sum_i n'_i$ . La spécialisation de l’algèbre de Hecke en  $q = 1$  est un morphisme  $\rho$  d’algèbres de  $\mathcal{H}$  vers  $\mathbb{C}W = \bigoplus_{x \in W} \mathbb{C}x$ , l’algèbre du groupe de  $W$ . Nous appliquons  $\rho$  des deux cotés de l’équation

$$(1 + T_{s_1}) \cdots (1 + T_{s_k}) = \sum_i n'_i q^i + \sum_{w \neq 1} \lambda_w T_w$$

dont les  $\lambda_w$  sont des polynômes en  $q$ , et nous obtenons

$$(1 + s_1) \cdots (1 + s_k) = \sum_i n'_i + \sum_{w \neq 1} \lambda_w(1)w.$$

Ceci implique que  $\sum_i n'_i = l$ , et ceci finit la preuve du lemme.  $\square$

### 3.1.

**Preuve de la proposition 3.3.** Dans la suite exacte (3.1), le fait que  $R^n$  est projectif comme  $R$ -module à gauche nous permet de tensoriser par  $K'$  et obtenir encore une suite exacte de  $(K', K')$ -bimodules, par le lemme 3.4 :

$$0 \rightarrow K' \otimes_R \ker f \rightarrow K' \otimes_R M \rightarrow K'^n \rightarrow 0$$

de par le lemme 3.7 cette suite est isomorphe à :

$$0 \rightarrow K' \otimes_R \ker f \rightarrow K'^m \oplus \left( \bigoplus_{w \neq 1} (K'_w)^{n_w} \right) \rightarrow K'^m \rightarrow 0.$$

Il est facile de voir que

$$\text{Hom}_{K', K'}(K'_w, K') \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } w \neq 1, \\ K' & \text{si } w = 1. \end{cases} \tag{3.7}$$

Donc nous pouvons conclure que

$$K' \otimes_R \ker f \simeq \bigoplus_{w \neq 1} (K'_w)^{n_w}.$$

Cet isomorphisme et (3.7) permettent de conclure que  $\text{Hom}_{K', K'}(K' \otimes_R \ker f, K') = 0$ .

Supposons que  $g \in \text{Hom}_{C'}(R' \otimes_R \ker f, R')$ , et  $g \neq 0$ . Alors  $0 \neq \text{Id} \otimes g \in \text{Hom}_{K', K'}(K' \otimes_R \ker f, K')$ , ce qui est une contradiction et permet de finir la preuve de la proposition.  $\square$

## 4. Preuves des théorèmes

**Preuve du théorème 2.2.** Comme conséquence de la proposition 3.3 et de la suite exacte (3.2), nous concluons que

$$\text{Hom}_{C'}(R^m, R') \simeq \text{Hom}_{C'}(R' \otimes_R M, R'),$$



ce qui démontre le théorème 2.2 pour  $M = \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_k}$  et  $N = R$ .

Par le lemme 3.3 de [1], nous savons que si  $M, N \in \mathbf{B}$ , le morphisme

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_s(M, N) : \text{Hom}(\theta_s M, N) &\rightarrow \text{Hom}(M, \theta_s N)(2) \\ f &\mapsto (m \mapsto x_s \otimes f(1 \otimes m) + 1 \otimes f(1 \otimes x_s m)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de  $R$ -modules à droite gradués. Nous connaissons explicitement son inverse : si  $g \in \text{Hom}(M, \theta_s N)(2)$ , on peut écrire de manière unique  $g(m) = 1 \otimes g_1(m) + x_s \otimes g_2(m)$ , avec  $g_1(m), g_2(m) \in N$ . Ceci définit les morphismes  $g_1$  et  $g_2$  associés à  $g$ . La fonction inverse de  $\mathfrak{F}_s(M, N)$  est  $\mathfrak{G}_s(M, N) : \text{Hom}(M, \theta_s N)(2) \rightarrow \text{Hom}(\theta_s M, N)$ , le morphisme qui envoie  $g$  vers le morphisme  $\lambda \otimes m \mapsto \lambda g_2(m)$ , avec  $\lambda \in R$  et  $m \in M$ .

Nous avons de même un isomorphisme de  $R'$ -modules à droite gradués.

$$\mathfrak{F}'_s(M', N') : \text{Hom}_{C'}(\theta'_s M', N') \simeq \text{Hom}_{C'}(M', \theta'_s N')(2).$$

Le lemme suivante découle directement des définitions des morphismes impliqués.

**Lemme 4.1.** *Nous avons le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} R' \otimes_R \text{Hom}_C(M, \theta_s N)(2) & \longrightarrow & \text{Hom}_{C'}(\mathfrak{X}(M), \theta'_s \mathfrak{X}(N))(2) \\ \text{Id} \otimes \mathfrak{G}_s(M, N) \downarrow & & \uparrow \text{Id} \otimes \mathfrak{F}'_s(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(N)) \\ R' \otimes_R \text{Hom}_C(\theta_s M, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_{C'}(\theta'_s \mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(N)) \end{array}$$

où les morphismes horizontaux sont les morphismes naturels.

Ce lemme démontre le théorème (2.2) pour  $M$  et  $N$  des bimodules basiques (de la forme  $\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_k}(d)$ ). Et ceci nous donne la preuve pour  $M, N \in \mathbf{B}$ . □

**Preuve du théorème 2.3.** Nous commençons par démontrer la partie « si » du théorème. Nous commencerons par montrer que si  $M \in \mathbf{B}$  et  $M \neq 0$ , alors  $\mathfrak{X}(M) \neq 0$ . Nous savons que  $\mathfrak{X}(M) \simeq (V'^\perp R \cdot M) \setminus M$  (on rappelle que  $V'^\perp$  est l'ensemble des formes linéaires sur  $V$  nulles sur  $V'$ ), donc il suffit de montrer que  $V'^\perp R \cdot M \neq M$ . Soit  $M = \bigoplus_{i \geq k} M_i \oplus \{0\}$  son écriture graduée, avec  $M_k \neq 0$ . Comme les éléments non nuls de  $V'^\perp$  sont de degré 2 (voir la définition 1.7), alors les degrés des éléments non nuls de  $V'^\perp R \cdot M$  sont supérieurs à  $k$ , ce qui nous permet de conclure que  $V'^\perp R \cdot M \neq M$ .

Si  $M$  est décomposable, il existent  $M_1, M_2 \neq 0$  avec  $M \simeq M_1 \oplus M_2$ . Ceci implique que  $\mathfrak{X}(M) \simeq \mathfrak{X}(M_1) \oplus \mathfrak{X}(M_2)$ , avec  $\mathfrak{X}(M_1), \mathfrak{X}(M_2) \neq 0$  par ce qu'on vient de voir, donc  $\mathfrak{X}(M)$  est décomposable. Ceci implique la partie « si » du théorème.

Donc nous nous intéressons à la partie « seulement si ». Soit  $I$  un ensemble de représentants des classes d'isomorphismes des bimodules indécomposables de  $\mathbf{B}$ . Nous fixons  $M \in I$  jusqu'à la fin de cette preuve. Par le théorème de Krull–Schmidt (cf. remarque 1.3 de [4]) il existe une suite  $s_1, \dots, s_n \in S$  et un  $d \in \mathbb{Z}$  tels que  $M$  est un facteur direct de  $\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_k}(d)$ .

Étant donné que  $E = \text{End}_C(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_k})(d)$  possède une base (finie) comme  $R$ -module (la base des feuilles légères), il est facile de voir que  $E_0$ , le  $\mathbb{C}$ -sous espace vectoriel de  $E$  formé par les endomorphismes de degré zéro, est une  $\mathbb{C}$ -algèbre de dimension finie. Ceci implique que si

$G = \text{End}_{\mathbb{C}}(M)$ , alors  $G_0$  (endomorphismes de degré zéro) est aussi une  $\mathbb{C}$ -algèbre de dimension finie.

Si  $G' = \text{End}_{\mathbb{C}'}(\mathfrak{X}(M))$  nous avons un morphisme entre des  $\mathbb{C}$ -algèbres de dimension finie  $G_0 \rightarrow G'_0$  qui est surjectif comme conséquence du théorème 2.2. Donc nous pouvons relever les idempotents de  $G'_0$  en des idempotents de  $G_0$ . Ceci implique que si  $\mathfrak{X}(M)$  est décomposable, alors  $G'_0$  a des idempotents non triviaux, et donc  $G_0$  aussi, donc  $M$  est décomposable ce qui est absurde.  $\square$

**Preuve du théorème 2.4.** Nous savons que  $\mathfrak{X}$  étant un foncteur additif, il définit bien par passage au quotient un morphisme de groupes entre les groupes de Grothendieck scindés.  $\square$

**Lemme 4.2.** Soient  $M, M' \in I$ . Alors  $\mathfrak{X}(M) \simeq \mathfrak{X}(M') \Rightarrow M = M'$ .

**Démonstration.** Supposons  $\mathfrak{X}(M) \simeq \mathfrak{X}(M')$ . Soit  $f : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M')$  un isomorphisme, et  $g$  son inverse. Soient  $F : M \rightarrow M'$  et  $G : M' \rightarrow M$  des relevés respectifs, c'est-à-dire, tels que  $Id \otimes F = f$  et  $Id \otimes G = g$ . Nous posons  $E = \text{End}_{\mathbb{C}}(M)$ ,  $E' = \text{End}_{\mathbb{C}'}(\mathfrak{X}(M))$  et nous notons  $E_0, E'_0$  leurs parties de degré zéro respectives.

Comme conséquence du théorème 2.2 nous avons un morphisme surjectif  $E_0 \rightarrow E'_0$  de  $\mathbb{C}$ -algèbres de dimension finie. Comme  $E_0$  est une algèbre locale de dimension finie sur  $\mathbb{C}$  et comme  $E'_0$  est un quotient non nul de  $E_0$ , un élément de  $E_0$  est inversible si et seulement si son image dans  $E'_0$  est inversible. On en déduit que  $G \circ F$  est inversible. De même,  $F \circ G$  est inversible, donc  $F$  et  $G$  sont des isomorphismes.  $\square$

Par le théorème de Krull–Schmidt nous savons que  $\langle N \rangle = \langle M \rangle \in \langle \mathbf{B}' \rangle \Leftrightarrow N \simeq M \in \mathbf{B}'$ .

Soit  $M \in I$ . Par le théorème 2.3, le bimodule  $\mathfrak{X}(M)$  est indécomposable, donc le théorème de Krull–Schmidt et le lemme 4.2 permettent de conclure que  $\{\langle \mathfrak{X}(M) \rangle\}_{M \in I}$  est libre comme  $\mathbb{Z}$ -module dans  $\langle \mathbf{B}' \rangle$ . Le fait que  $\{\langle M \rangle\}_{M \in I}$  est une base du  $\mathbb{Z}$ -module  $\langle \mathbf{B} \rangle$  permet de conclure que  $\mathfrak{X} : \langle \mathbf{B} \rangle \rightarrow \langle \mathbf{B}' \rangle$  est injectif.

La surjectivité de  $\mathfrak{X}$  se déduit du lemme suivant :

**Lemme 4.3.** Le foncteur  $\mathfrak{X} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}'$  est essentiellement surjectif.

**Démonstration.** Chaque objet indécomposable  $\gamma'$  de  $\mathbf{B}'$  est un facteur direct d'un objet  $X' = \theta'_{s_1} \cdots \theta'_{s_p}(k)$ . Soit  $X = \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_p}(k)$ . Soit  $E = \text{End}_{\mathbb{C}}(X)$ , et  $E_0$  sa partie gradué de degré zéro. Soit  $E' = \text{End}_{\mathbb{C}'}(X')$ , et  $E'_0$  sa partie gradué de degré zéro. Comme  $E_0$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre de dimension finie et le morphisme  $E_0 \rightarrow E'_0$  est surjectif comme conséquence du théorème 2.2, alors tout idempotent de  $E'_0$  peut se relever à un idempotent de  $E_0$ . En particulier l'idempotent définissant  $\gamma'$ , ce qui permet de compléter les preuves du lemme 4.3 et du théorème 2.4.  $\square$

## Remerciements

J'aimerais remercier Geordie Williamson pour ses remarques, et Raphaël Rouquier pour son encouragement et ses multiples idées et commentaires.

## Références

- [1] N. Libedinsky, Sur la catégorie des bimodules de Soergel, J. Algebra (2008), doi:10.1016/j.jalgebra.2008.05.027.

- [2] W. Soergel, The combinatorics of Harish–Chandra bimodules, *J. Reine Angew. Math.* 429 (1992) 49–74.
- [3] W. Soergel, On the relation between intersection cohomology and representation theory in positive characteristic, *J. Pure Appl. Algebra* 152 (1–3) (2000) 311–335.
- [4] W. Soergel, Kazhdan–Lusztig polynomials and indecomposable bimodules over polynomial rings, *J. Inst. Math. Jussieu* 6 (3) (2007) 501–525.